

数値シミュレーションの紹介

数値解析技術研究会

1. はじめに

最近のコンピュータの高速化とアルゴリズムの急激な発達に伴って、複雑な流れの現象が計算されるようになってきている。

物理現象はたいていの場合には、その現象を支配する方程式の系が構成されているが、それらの方程式をある特定の条件下で、厳密解の形で解き明かすことは一般には困難である。特別な場合を除いて、不可能といっても過言ではない。したがって、数値解析は流れなどの複雑な物理現象を把握するのに有効な手段であると考えられる。

今回は、Euler式記述法による流れの連続式や運動方程式を誘導し、誘導した方程式をもとに1次元河床変動計算における基礎式を導く。

また、常流・射流を含んだ遷移断面（不連続面）をもつ流れの解析に使われるMacCormack法について簡単に記述し、MacCormack法を用いた計算の一例について紹介する。

2. 支配方程式の誘導

まず、方程式の誘導をする前に、用語の定義の確認をしておく。

「システム」とは、ある時刻に流れ場内のある空間領域を占めている流体塊のことで、時間とともにその位置・形状を変えていくもの。システムの境界面を(SS)とする。

「コントロールサーフェイス」(CS)とは、流れ場内で任意に固定された閉曲面。

「コントロールボリューム」(CV)とは、コントロールサーフェイスで囲まれた固定領域。

流体運動の見方には2つの方法がある。一つは、時間の経過とともに流体中を移動するシステムに注目する方法(Lagrange式)であり、もう一方は、空間に固定したコントロールボリュームに注目して流体の挙動を観察する方法(Euler式)である。

流れの数値解析を行う場合、座標系を固定したEuler式記述法の方が便利であるが、質量保存則や運動量保存則の概念はシステムに関するLagrange式記述法の方が理解しやすい。そこで、ここでは、よく知られているLagrange式記述法の連続式や運動方程式をEuler式記述法に変換する。

(1) 質量保存則（連続式）

「ある時刻に流れの場にある空間領域を占めていた流体塊（システム）は、時間とともにその位置・形状を変えていくが、システム自身は同じ実質部分より構成されているから、その質量は時間的に変化しない。したがって、システムに対しては、質量保存則が成立する。」

これが、システムに注目したLagrange的な質量保存則の見方である。

【質量保存則】(Lagrange式記述法)

$$\text{システムの質量の時間的増加率} = 0$$

つぎに、図-1を参照しながら、Lagrange式記述法をEuler式記述法に変換する。

図-1(a)のように(CS)で囲まれた固定空間領域(CV)を考える。時刻 t において、この領域に存在していたシステムが微小時間 δt 後に図-1(b)のように移動したとする。時刻 t におけるシステム内お

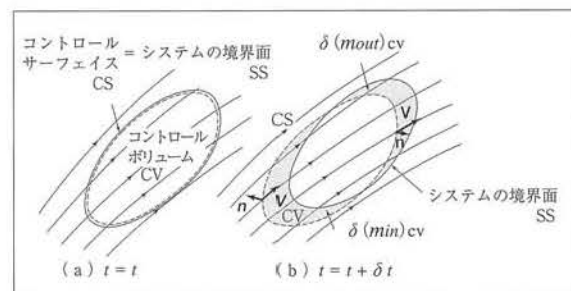


図-1 コントロールボリューム内のシステムの移動

よび (CV) 内の質量をそれぞれ $m_{cs,t}$ 、 $m_{cv,t}$ とすると、時刻 t では、

$$m_{cs,t} = m_{cv,t} \dots\dots\dots \text{式(1)}$$

時刻 $t + \delta t$ では

$$m_{cs,t+\delta t} = m_{cv,t+\delta t} + \delta(m_{out})_{cv} - \delta(m_{in})_{cv} \dots\dots\dots \text{式(2)}$$

ここに、 $\delta(m_{out})_{cv}$ 、 $\delta(m_{in})_{cv}$ は δt 時間内に (CV) から出ていく質量および入ってくる質量を表している。

Lagrange 式記述法の質量保存則を式 (3) に示す。

$$\frac{Dm_{sy}}{Dt} = 0 \dots\dots\dots \text{式(3)}$$

式 (3) を上記の関係を用いて Euler 式記述法に変換する。

式 (3) は、システムに関する記述法であり、式 (4) のように表される。

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{m_{sy,t+\delta t} - m_{sy,t}}{\delta t} = 0 \dots\dots\dots \text{式(4)}$$

さらに、式 (4) は、式 (1)・(2) の関係式を用いて、(CV) に関する表記法である式 (5) のように変換できる。

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{m_{cv,t+\delta t} - m_{cv,t}}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta(m_{out})_{cv} - \delta(m_{in})_{cv}}{\delta t} = 0 \dots\dots\dots \text{式(5)}$$

式 (5) の右辺第 1 項は (CV) 内の質量の時間的増加率であり、

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{m_{cv,t+\delta t} - m_{cv,t}}{\delta t} = \frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dv \dots\dots\dots \text{式(6)}$$

と表される。 ρ : 流体の密度

また、式 (5) の左辺第 2 項は単位時間あたり (CV) から流出する全ての質量を表す。

つぎに (CV) の表面、すなわち (CS) における流速 V を用いて式 (5) の左辺第 2 項を書き直す。

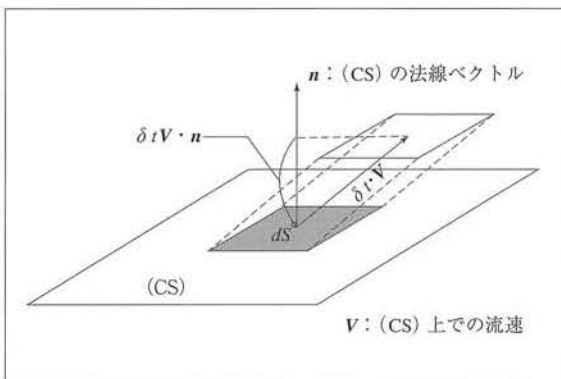


図-2 δt 間に dS を通過する流量

n を (CS) の表面に立てた外向きの法線ベクトルとする。

図-2 のように、(CS) 上の微小な面積 dS について考える。 dS 上での流速を V とすると、 dS を δt 間に通過する流体の体積は

$$\delta t V \cdot n dS \dots\dots\dots \text{式(7)}$$

dS を単位時間に通過する流体の質量は

$$\rho V \cdot n dS \dots\dots\dots \text{式(8)}$$

となる。これを (CS) 全体で面積分すると単位時間あたりに (CS) から流出する全ての質量となる。したがって、式 (5) の左辺第 2 項は式 (9) のように書き換えることができる。

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta(m_{out})_{cv} - \delta(m_{in})_{cv}}{\delta t} = \int_{cs} \rho V \cdot n dS \dots\dots\dots \text{式(9)}$$

したがって、質量保存則の Euler 式記述法【式 (3)】は式 (5)(6)(9) より、式 (10) のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho V \cdot n dS = 0 \dots\dots\dots \text{式(10)}$$

以上のようにして、システムに注目した Lagrange 式記述法の連続式を CV に注目した Euler 式記述法の連続式に変換できる。

(2) 運動量保存則 (運動方程式)

「システムに対する運動量保存則は、ニュートンの第 2 法則より、システムのもつ運動量の時間的増加率は、システムに作用する全ての力の和に等しい。」

これが、システムに注目した Lagrange 的な運動量保存則の見方である。

【運動量保存則】 (Lagrange 式記述法)

システムのもつ運動量の時間的増加率	=	システムに作用する全ての力の和
-------------------	---	-----------------

システムのもつ運動量を P とするとシステムに作用する全ての力を F とすると、運動方程式は、

$$\frac{DP}{Dt} = F \dots\dots\dots \text{式(11)}$$

となる。

つぎに、図-3を参照しながら、式(11)のx方向の運動方程式をLagrange式記述法からEuler式記述法に変換する。

運動量のx方向成分を P_x とする。

時刻 t のそのシステム内における値を $(P_x)_{sy,t}$ 、(CV)における値を $(P_x)_{cv,t}$ とする。

時刻 t では、

$$(P_x)_{sy,t} = (P_x)_{cv,t} \dots\dots\dots \text{式(12)}$$

時刻 $t + \delta t$ では

$$(P_x)_{sy,t+\delta t} = (P_x)_{cv,t+\delta t} + \delta |(P_x)_{out}|_{cv} - \delta |(P_x)_{in}|_{cv} \cdot \text{式(13)}$$

となる。

ここに、 $\delta |(P_x)_{out}|_{cv}$ 、 $\delta |(P_x)_{in}|_{cv}$ は δt 時間内に(CV)から出ていくx方向の運動量および入ってくるx方向の運動量を表している。

Lagrange式記述法のx方向の運動方程式を式(14)に示す。

$$\frac{D(P_x)_{sy}}{Dt} = F_x \dots\dots\dots \text{式(14)}$$

F_x : システムに作用するx方向の力の総和

式(14)を上記の関係を用いてEuler式記述法に変換する。

式(14)の左辺は、システムに関する記述法であり、式(15)のように表される。

$$\frac{D(P_x)_{sy}}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x)_{sy,t+\delta t} - (P_x)_{sy,t}}{\delta t} \dots\dots\dots \text{式(15)}$$

さらに、式(15)は、式(12)・(13)の関係式を用いて、(CV)に関する表記法である式(16)のように変換できる。

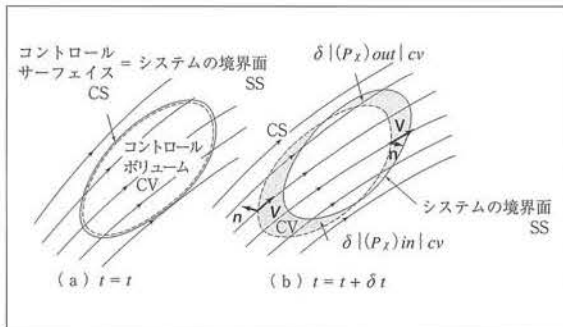


図-3 コントロールボリューム内のシステムの移動

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x)_{sy,t+\delta t} - (P_x)_{sy,t}}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x)_{cv,t+\delta t} - (P_x)_{cv,t}}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta |(P_x)_{out}|_{cv} - \delta |(P_x)_{in}|_{cv}}{\delta t} \dots\dots\dots \text{式(16)} \end{aligned}$$

式(16)の右辺第1項は(CV)内の運動量の時間的増加率であり、

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(P_x)_{cv,t+\delta t} - (P_x)_{cv,t}}{\delta t} = \frac{\partial (P_x)_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho u dV \dots\dots\dots \text{式(17)}$$

u : x方向の流速 ((CV)内の V のx方向成分)と表される。

また、式(16)の右辺第2項は単位時間あたり(CV)から流出する全ての運動量を表す。

(CV)の表面、すなわち(CS)における流速 V を用いて式(16)の左辺第2項を書き直す。

図-2より、(CS)上の微小面積 dS を単位時間あたりに通過する質量は式(8)に示すとおり、 $\rho V \cdot n dS$ であるので、(CS)上の微小面積 dS を単位時間あたりに通過するx方向の運動量は

$$u \rho V \cdot n dS \dots\dots\dots \text{式(18)}$$

と考えることができる。

これを(CS)全体で面積分すると単位時間あたりに(CS)から流出する全てのx方向の運動量となる。したがって、式(16)の右辺第2項は式(19)のように書き換えることができる。

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta |(P_x)_{out}|_{cv} - \delta |(P_x)_{in}|_{cv}}{\delta t} = \int_{cs} u \rho V \cdot n dS \dots\dots \text{式(19)}$$

したがって、質量保存則のEuler式記述法【式(14)】は式(20)のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho u dV + \int_{cs} \rho u V \cdot n dS = F_x \dots\dots\dots \text{式(20)}$$

以上のようにして、システムに注目したLagrange式記述法の運動方程式をCVに注目したEuler式記述法の運動方程式に変換できる。

3. 1次元河床変動計算における基礎式の誘導

以上で求めた、Euler式記述法の連続式【式(10)】・運動方程式【式(20)】を利用して、1次元河床変動計算を実施するための基礎式を導き出す。

図-4のように、支川のある直線水路を考える。また、太線に囲まれた領域を(CV)に設定する。

w' : 支川の支川下流方向の流速、 Q : 本川流量、
 θ : 本川と支川とのなす角 (上流側の角度)、

(1) 連続式

まず最初に、式(10)の連続式について考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \dots\dots\dots \text{式(10)}$$

式(10)の左辺第1項は(CV)内の全質量の時間的増加率を表すものであるので、図-4より、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\rho A dx}_{(CVの体積)}) \dots\dots\dots \text{式(21)}$$

A : 通水断面 ($=Bh$), h : (CV)での水深と書くことができる。

また、式(10)の左辺第2項は(CS)から単位時間あたりに流出する全質量であるので、図-4の(CS)から流出する質量を求める。

図-4のように(CS)を(CS₁~₄)に分割し、それぞれの面から単位時間あたりに流出する質量を求めらる。

まず、(CS₁)から単位時間あたりに流出する質量は

$$\int_{CS_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 = \int_{CS_1} \rho(-u) dS_1 = \rho(-u)A = -\rho Q \dots\dots\dots \text{式(22)}$$

となり、(CS₃)から流出する質量は、

$$\int_{CS_3} \rho(u + \Delta u) \cdot \mathbf{n}_3 dS_3 \\ = \int_{CS_3} \rho u \cdot \mathbf{n}_3 dS_3 + \int_{CS_3} \rho \Delta u \cdot \mathbf{n}_3 dS_3$$

$$= \int_{CS_3} \rho u dS_3 + \int_{CS_3} \rho (\Delta u) dS_3 \\ = \rho u A + \rho \Delta u A \quad \left(\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \text{より} \right) \\ = \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} dx \dots\dots\dots \text{式(23)}$$

となる。

(CS₂)から流出する質量は、

$$\int_{CS_2} \rho \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 = \rho(-w' \sin \theta) \cdot h \cdot dx \\ = -\rho q \sin \theta dx = -\rho q_* dx \dots\dots\dots \text{式(24)}$$

h : (CV)での水深

となる。

また、(CS₄)からの流出は0より、

(CS)から単位時間あたりに流出する全質量は、式(22)(23)(24)を加えたもので、

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho Q) dx - \rho q_* dx \dots\dots\dots \text{式(25)}$$

と表される。

したがって、(CV)に関する連続式は、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_* \dots\dots\dots \text{式(26)}$$

となる。

土砂の連続式も同様にして次式を得ることができる。

$$\frac{\partial (z_B \cdot B)}{\partial t} + \frac{\partial (q_B \cdot B)}{\partial x (1-\lambda)} = q_{BS} \dots\dots\dots \text{式(27)}$$

ここに、

z_B : 河床位、 λ : 空隙率、 q_B : 掃流砂量、

q_{BS} : 単位長さあたりの支川からの流入土砂量

(2) 運動方程式

つぎに、式(20)の運動方程式について考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho u dV + \int_{CS} \rho u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = F_x \dots\dots\dots \text{式(20)}$$

式(20)の左辺第1項は(CV)内の全運動量の時間的増加率を表すものであるので、

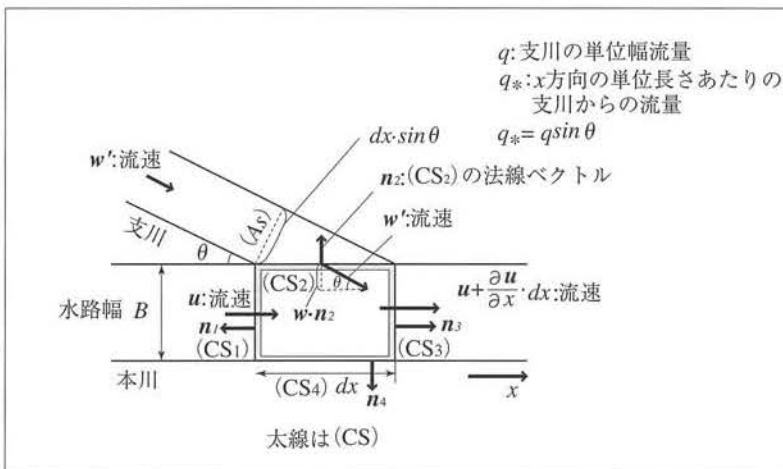


図-4 一次元水路の概念図

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u A dx) \dots\dots\dots \text{式(28)}$$

(CVの体積)

と書くことができる。

また、式(20)の左辺第2項は(CS)から単位時間あたりに流出するx方向の全運動量であるので、図-4の(CS)から流出する運動量を求める。

図-4から同様に(CS)を(CS₁~CS₄)に分割し、それぞれの面から単位時間あたりに流出する運動量を求める。

まず、(CS₁)から単位時間あたりに流出するx方向の運動量は

$$\int_{CS_1} \rho u u \cdot n_1 dS = -\rho u u A = -\rho Q u \dots\dots\dots \text{式(29)} \quad [u \text{ と } n_1 \text{ は逆方向}]$$

とすると、(CS₃)から流出するx方向の運動量は、

$$\rho Q u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Q u) dx \dots\dots\dots \text{式(30)} \quad [u \text{ と } n_3 \text{ は同方向}]$$

となる。

(CS₂)からから流出するx方向の運動量は、

$$\int_{CS_2} \rho (w' \cos \theta) \underbrace{w' \cdot n_2}_{(-w' \sin \theta)} dS_2 = -\rho w' \cos \theta w' \sin \theta \cdot h \cdot dx = -\rho w' \cos \theta q_* dx \dots\dots\dots \text{式(31)}$$

となる。(q_{*} = q sin θ, w' h = q)

また、(CS₄)からの流出は0より、(CS)から単位時間あたりに流出するx方向の全運動量は、式(29)(30)(31)を加えたもので、

$$\int_{CS} \rho u v \cdot n dS = \frac{\partial}{\partial x}(\rho Q u) dx - \rho w' \cos \theta q_* dx \dots\dots\dots \text{式(32)}$$

と表される。

つぎに、式(20)の右辺について考える。これは、システムに作用するx方向の力の総和である。

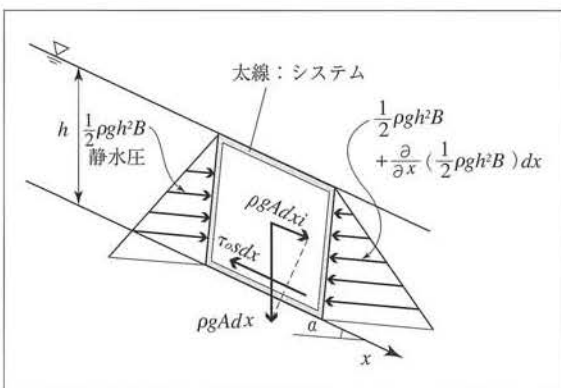


図-5 システムに作用するx方向の力

図-4を側面から見たものが図-5であり、システムに作用する力を示す。

g：重力加速度、

h：水深、B：水路幅、s：潤辺、τ₀：せん断力

n：マンニングの粗度係数、sin α ≃ tan α = i

cos α ≃ 1

図-5より、(CV)の底面に作用するx方向のせん断力は

$$-\tau_0 dx \dots\dots\dots \text{式(33)}$$

であり、(CS₁)に作用するx方向の静水圧は

$$\frac{1}{2} \rho g h^2 B \cos \alpha \approx \frac{1}{2} \rho g h^2 B \dots\dots\dots \text{式(34)}$$

また、(CS₃)に作用するx方向の静水圧は

$$\left\{ -\frac{1}{2} \rho g h^2 B - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho g h^2 B \right) dx \right\} \cos \alpha \approx -\frac{1}{2} \rho g h^2 B - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho g h^2 B \right) dx \dots\dots\dots \text{式(35)}$$

となる。

さらに、システムに作用する重力のx方向成分は、

$$\rho g A dx i \dots\dots\dots \text{式(36)}$$

となる。

したがって、システムに作用する全てのx方向の力は

$$\rho g A dx i - \tau_0 dx - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho g h^2 B \right) dx \dots\dots\dots \text{式(37)}$$

となる。

また、

$$\tau_0 = \rho g R i_e = \rho g \frac{n^2 u^2}{R^{1/3}} \dots\dots\dots \text{式(38)}$$

$$A = R S \dots\dots\dots \text{式(39)}$$

を用いると、

式(20)の(CV)に関するx方向の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(A u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q u + \frac{1}{2} g h^2 \beta \right) = q_* w' \cos \theta + g A (i - i_e) \dots\dots\dots \text{式(40)}$$

となる。

i：河床勾配、i_e：エネルギー勾配、R：径深

4. 計算手法

山地河川を想定した流れの計算および河床変動計算は、跳水などの不連続帯が流れに存在し、従来の

差分法を用いた計算では上流と射流に分けて計算する必要があり複雑で困難なものとなる

ここでは、常流・射流を含んだ遷移断面（不連続面）をもつ流れの解析に使われるMacCormack法について紹介する。

つぎに、MacCormack法の差分式を示す。

基礎式を

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial x} = C$$

とする

U_i^p を格子点 ($x = i\Delta x, t = n\Delta t$) 上の U の値と定義するとMacCormack法は次のように離散化される。

・予測子段階

$$U_i^p = U_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1} - E_i) + \Delta t C_i - (D_{i+1} - D_i)$$

・修正子段階

$$U_i^c = \left\{ \frac{1}{2} (U_i + U_i^p) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_i^p - E_{i-1}^p) + \Delta t C_i^p - (D_i - D_{i-1}) \right\}$$

ここで、 $D_i = K_V u_{*i} h_i (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

u_* ：摩擦速度、 K_V ：人工粘性係数

5. 計算事例

コンクリートスリット砂防ダムのスリット部の形状がダム下流への流出土砂量の時間的変化に与える影響について計算を行った。

計算条件を以下に示す。計画洪水流量約600 m³/s、水通し幅35m、河床勾配約1/25、平均粒径約

5 cm、ダム高12m、スリット形状は次の2タイプを変化させた。【スリット高さ12m、幅10m】【スリット高さ12m、幅5m】

スリット砂防ダムには、洪水の増水期に土砂の流出を抑制し、洪水後半の減水期および、その後の複数の中小出水で土砂を平滑化して流出させる機能が期待されている。

このような機能を十分に発揮させるためのスリット幅は、狭く深い形状の方が良いということが、これまでの水理実験および数値シミュレーションによって明らかにされている。

スリット幅の違いによる流出土砂量の時間的変化をMacCormack法により計算した結果を図-6に示す。1つの洪水波形に対して、どちらのスリットタイプも、供給土砂量に比べて流出土砂のピークカットおよび土砂流出のピークを遅らせる効果が確認できる。また、効果の程度はスリット幅の狭いタイプの方(5m)が、より大きな土砂量調節効果を発揮していることがわかる。

6. おわりに

今回紹介した計算手法は、水と土砂の流れに対する砂防構造物の影響が大きい場合や、常流・射流の混在するような流れ場の土砂水理特性を表現するのに有効だといえる。しかし、数値シミュレーションを行う際には、目的に合わせた境界条件およびメッシュサイズなどに関する検討を十分に行う必要がある。今後とも、水理実験結果などとの比較およびモニタリングにより、構造物周辺に関する境界条件などの改良を行っていきたい。

執筆担当：阿部宗平(砂防・地すべり技術センター)

嶋 大尚(砂防・地すべり技術センター)

藤田正治(京都大学農学部助教授)

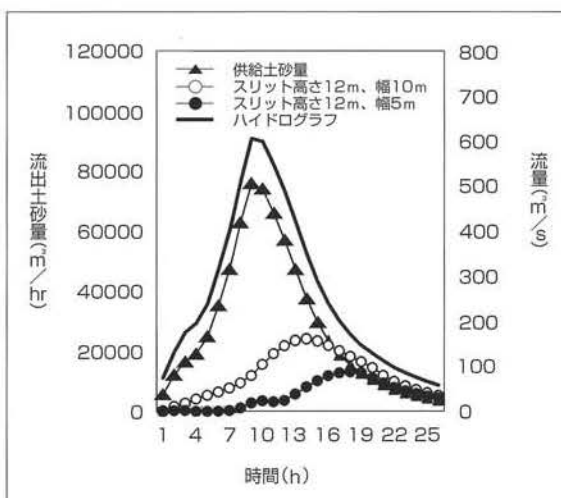


図-6 スリット幅の違いによる流出土砂の時間的変化